

Holographie

Pascal PICART

École Nationale Supérieure d'Ingénieurs du Mans – ENSIM

Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine – LAUM UMR CNRS 6613

Tel : 02.43.83.39.58.

email : pascal.picart@univ-lemans.fr

Fascicule 3 : Calcul de diffraction par FFT

Sommaire

Introduction

Optique de Fourier

Relation entre transformées de Fourier continue et discrète

Conditions d'échantillonnage

Calcul de diffraction par FFT

Quelques illustrations

Conclusion

Références bibliographiques

Introduction

Diffraction formalisée par différentes approches « onde scalaire »

- spectre angulaire
- Kirchhoff
- Rayleigh-Sommerfeld
- intégrale de diffraction de Fresnel (approx. paraxiale)

⇒ Il n'existe presque jamais de solution analytique simple pour un grand nombre de problèmes de diffraction rencontrés en pratique

⇒ Résoudre le problème de façon numérique

- diffraction calculée par un algorithme FFT

Optique de Fourier (1)

Propagation d'une onde monochromatique

Dans un milieu isotrope, linéaire et homogène, les équations de Maxwell conduisent à :

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

RQ: $\Delta \equiv$ Laplacien

- ➔ toutes les composantes de \mathbf{E} , $\{E_x, E_y, E_z\}$
- toutes les composantes de \mathbf{B} , $\{B_x, B_y, B_z\}$
- ⇒ même équation de propagation
- ⇒ description par une unique onde scalaire $U(\mathbf{r}, t)$

$$\left\{ \begin{array}{l} U = \{E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z\} \\ \mathbf{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \end{array} \right.$$

⇒ solution générale

$$U(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}) \exp[-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$$

⇒ équation de propagation de Helmholtz

$$(\Delta + k^2)U(\mathbf{r}) = 0$$

\mathbf{k} : vecteur d'onde

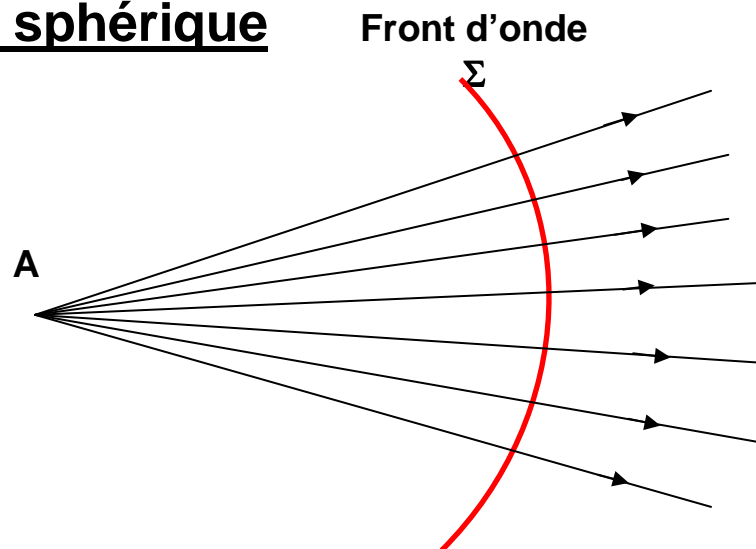
$$k = |\mathbf{k}| = n \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi n}{\lambda}$$

Optique de Fourier (2)

Propagation d'une onde monochromatique

Solutions particulières de l'équation de propagation

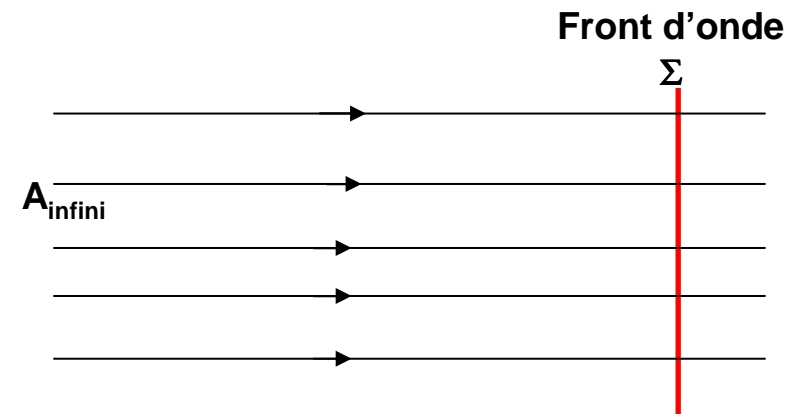
Onde sphérique



$$U(\mathbf{r}, t) = \frac{A_0}{r} \exp(-i\omega t) \exp(ikr)$$

$$r = \sqrt{z^2 + x^2 + y^2}$$

Onde plane



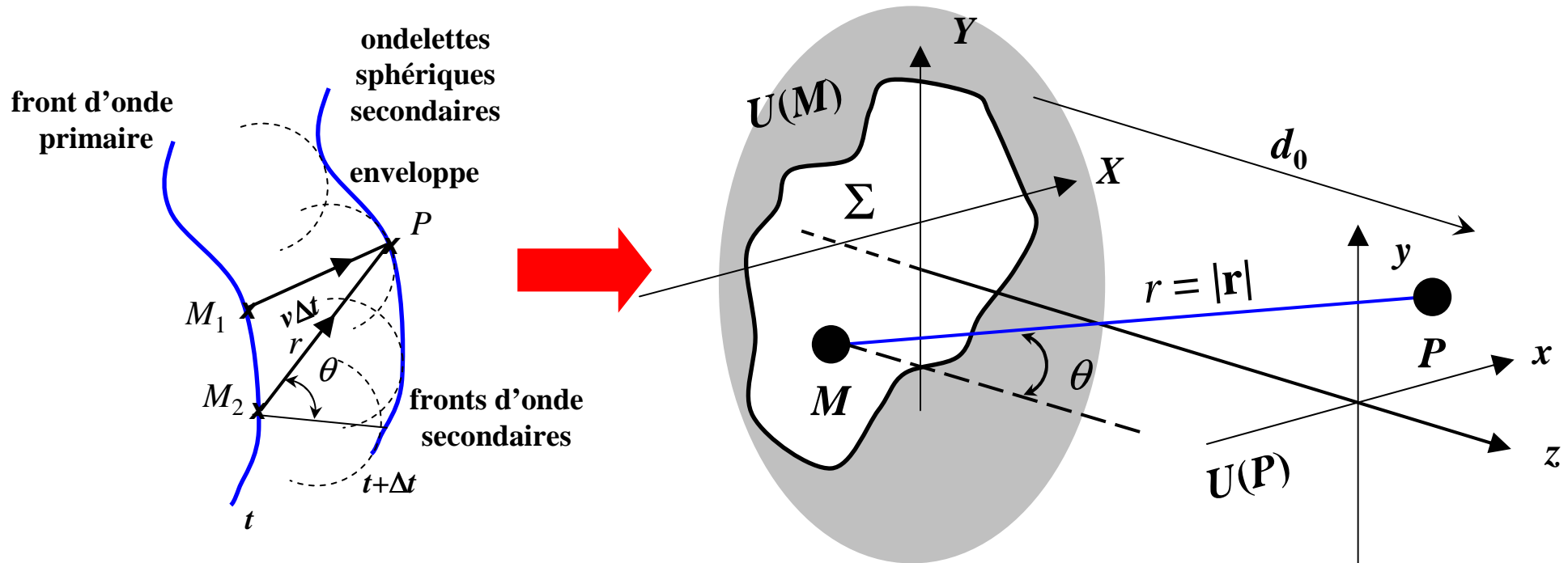
$$U(\mathbf{r}, t) = A_0 \exp(-i\omega t) \exp(+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$

\mathbf{k} : vecteur d'onde

Optique de Fourier (3)

Principe d'Huygens Fresnel

« la lumière est de nature ondulatoire et elle se propage par ondes »



Amplitude complexe au point P est donnée par une intégrale de superposition

$$U(x, y, d_0) = \frac{1}{i\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(X, Y, 0) \frac{\exp(ikr)}{r} K(\theta) dXdY$$

Optique de Fourier (4)

Formulation de la diffraction

$K(\theta)$: facteur d'obliquité qui conduit à 3 expressions pour la formulation de la diffraction

$$K(\theta) = \frac{\cos \theta + 1}{2}$$

Formule de Kirchhoff

$$K(\theta) = \cos \theta$$

1ère formule de Rayleigh-Sommerfeld

$$K(\theta) = 1$$

2ème formule de Rayleigh-Sommerfeld

avec

$$r = |\mathbf{MP}| = \sqrt{d_0^2 + (x - X)^2 + (y - Y)^2}$$

$$\cos(\theta) = \frac{d_0}{r} = \frac{d_0}{\sqrt{d_0^2 + (x - X)^2 + (y - Y)^2}}$$

Optique de Fourier (5)

Formulation de la diffraction

Formule de Kirchhoff

$$U(x, y, d_0) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma_0} U(X, Y, 0) \frac{\exp\left(ik\sqrt{d_0^2 + (x-X)^2 + (y-Y)^2}\right)}{2\left(d_0^2 + (x-X)^2 + (y-Y)^2\right)} \left(\sqrt{d_0^2 + (x-X)^2 + (y-Y)^2} + d_0\right) dXdY$$

1ère formule de Rayleigh-Sommerfeld

$$U(x, y, d_0) = \frac{d_0}{i\lambda} \iint_{\Sigma_0} U(X, Y, 0) \frac{\exp\left(ik\sqrt{d_0^2 + (x-X)^2 + (y-Y)^2}\right)}{d_0^2 + (x-X)^2 + (y-Y)^2} dXdY$$

2ème formule de Rayleigh-Sommerfeld

$$U(x, y, d_0) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma_0} U(x, y, 0) \frac{\exp\left(ik\sqrt{d_0^2 + (x-X)^2 + (y-Y)^2}\right)}{\sqrt{d_0^2 + (x-X)^2 + (y-Y)^2}} dXdY$$

Optique de Fourier (6)

Équation de convolution

$U(x, y, z+d_0) \equiv$ équation de convolution entre $U(x, y, z)$ et $h(x, y, d_0)$

$$\begin{aligned} U(x, y, z+d_0) &= U(x, y, z) * h(x, y, d_0) \\ &= \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int U(X, Y, z) h(x-X, y-Y, d_0) dXdY \end{aligned}$$

$h(x, y, d_0)$: réponse impulsionnelle de l'espace libre



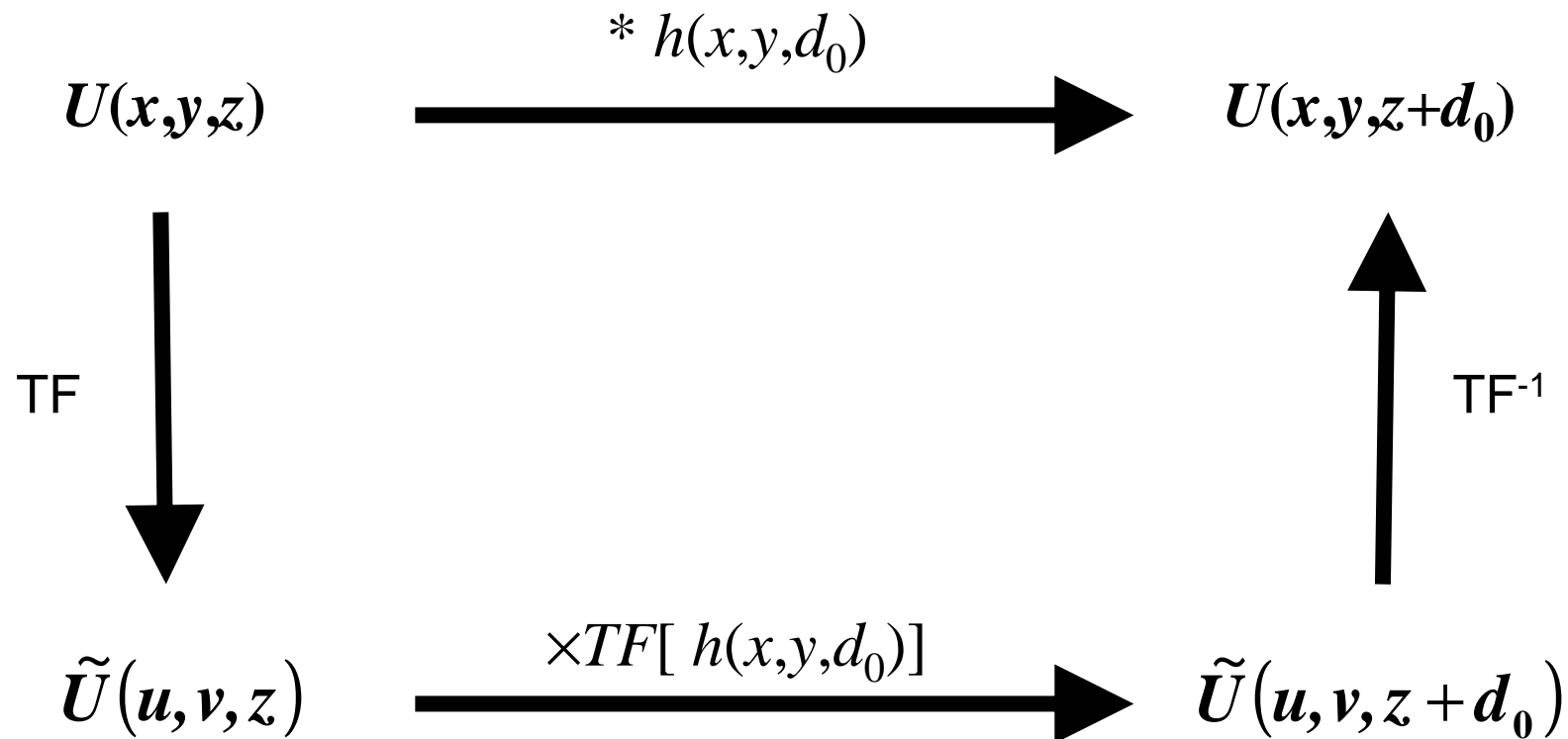
$h(x, y, d_0)$ dépend de la formulation choisie

Ex: 1ère formule de Rayleigh-Sommerfeld

$$h(x, y, d_0) = \frac{d_0}{i\lambda} \frac{\exp\left(2i\pi / \lambda \sqrt{d_0^2 + x^2 + y^2}\right)}{d_0^2 + x^2 + y^2}$$

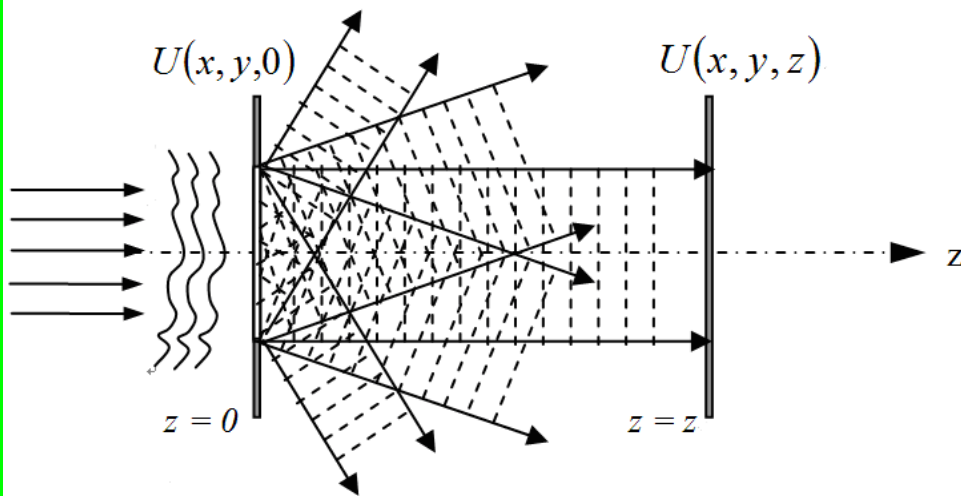
Optique de Fourier (7)

Équation de convolution
 Calcul de la diffraction par Transformée de Fourier



Optique de Fourier (8)

Propagation par le spectre angulaire



Décomposition en ondes planes de fréquences spatiales (u, v)

$$U(x, y, z) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int \tilde{U}(u, v, z) \exp[2i\pi(ux + vy)] du dv$$

avec $\tilde{U}(u, v, z) = TF[U(x, y, z)]$

Recherche des solutions de l'équation de Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2)\{U(u, v, z) \exp[2i\pi(ux + vy)]\} = 0$$

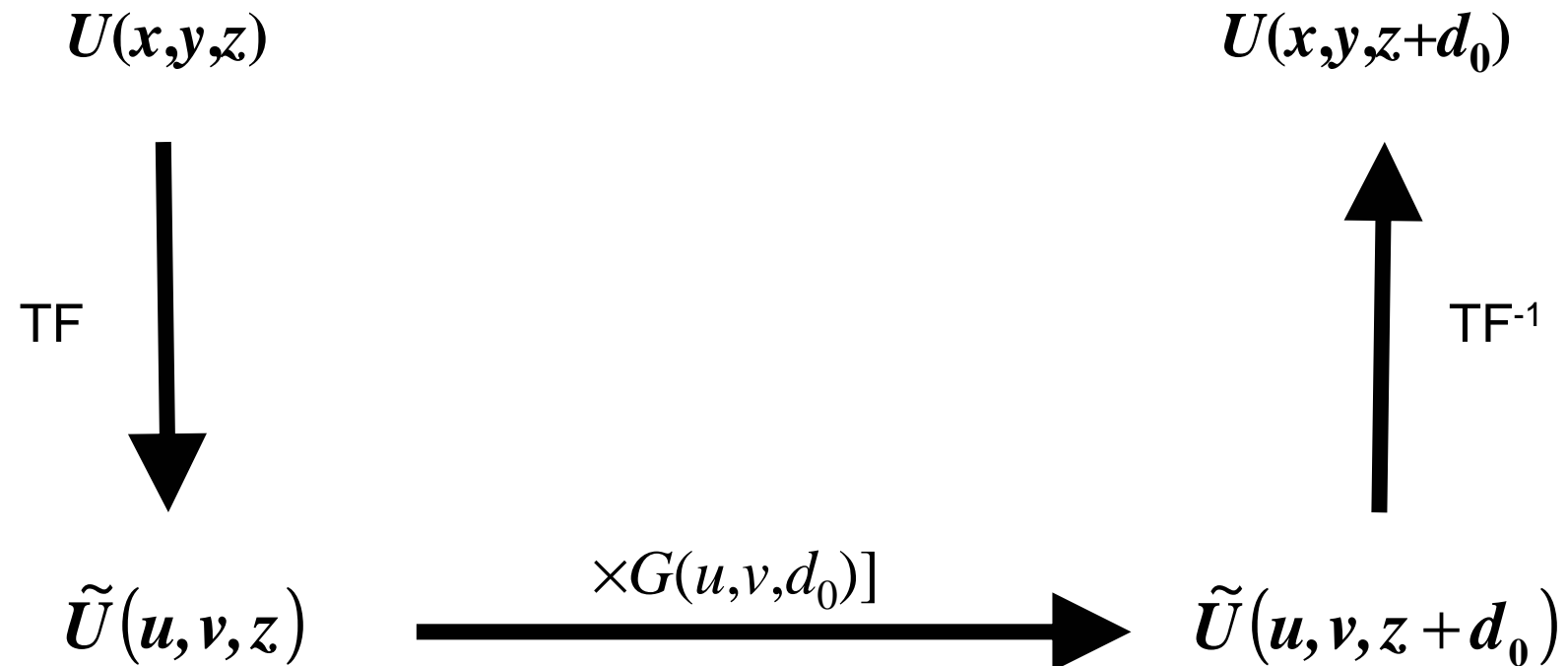
➔ $\tilde{U}(u, v, z + d_0) = \tilde{U}(u, v, z) \exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda} d_0 \sqrt{1 - (\lambda u)^2 - (\lambda v)^2}\right]$

Fonction de transfert du spectre angulaire

$$G(u, v, d_0) = \exp\left[2i\pi d_0 / \lambda \sqrt{1 - (\lambda u)^2 - (\lambda v)^2}\right]$$

Optique de Fourier (9)

Propagation par le spectre angulaire



Optique de Fourier (10)

Approximation de Fresnel


1ère formule de Rayleigh-Sommerfeld

$$U(x, y, d_0) = \frac{d_0}{i\lambda} \iint_{\Sigma_0} U(X, Y, 0) \frac{\exp\left(ik\sqrt{d_0^2 + (x-X)^2 + (y-Y)^2}\right)}{d_0^2 + (x-X)^2 + (y-Y)^2} dXdY$$

Cas où d_0 est « grand »

Linéarisation dans l'exponentielle

$$\begin{aligned} \sqrt{d_0^2 + (X-x)^2 + (Y-y)^2} &= d_0 \sqrt{1 + \frac{(X-x)^2}{d_0^2} + \frac{(Y-y)^2}{d_0^2}} \\ &\cong d_0 \left(1 + \frac{1}{2} \left[\frac{(X-x)^2}{d_0^2} + \frac{(Y-y)^2}{d_0^2} \right] - \frac{1}{8} \left[\frac{(X-x)^2}{d_0^2} + \frac{(Y-y)^2}{d_0^2} \right]^2 + \dots \right) \end{aligned}$$

 $\sqrt{d_0^2 + (X-x)^2 + (Y-y)^2} \cong d_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{(X-x)^2}{d_0^2} + \frac{1}{2} \frac{(Y-y)^2}{d_0^2} \right)$

Optique de Fourier (11)

Approximation de Fresnel

Expression de l'exponentielle

$$\exp\left[\frac{2i\pi}{\lambda} \sqrt{d_0^2 + (x-X)^2 + (y-Y)^2}\right] \cong \exp\left[\frac{2i\pi d_0}{\lambda}\right] \exp\left[\frac{i\pi(x-X)^2}{\lambda d_0} + \frac{i\pi(y-Y)^2}{\lambda d_0}\right]$$

Expression du dénominateur

$$d_0^2 + (x-X)^2 + (y-Y)^2 \cong d_0^2$$

condition

$$d_0 \gg \sqrt[3]{\frac{\pi}{4\lambda} \left[(x-X)^2 + (y-Y)^2 \right]_{\max}^2}$$

Équation de diffraction

$$U(x, y, z + d_0) = -\frac{i}{\lambda d_0} \exp\left[\frac{2i\pi d_0}{\lambda}\right] \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, y, z) \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda d_0} \left((x-X)^2 + (y-Y)^2 \right)\right] dXdY$$

⇒ réponse impulsionnelle de Fresnel

$$h(x, y, d_0) = -\frac{i}{\lambda d_0} \exp\left[\frac{2i\pi d_0}{\lambda}\right] \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda d_0} (x^2 + y^2)\right]$$

Optique de Fourier (12)

Transformée de Fresnel

Équation de diffraction après développement des facteurs quadratiques

$$U(x, y, z + d_0) = -\frac{i}{\lambda d_0} \exp\left[\frac{2i\pi d_0}{\lambda}\right] \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda d_0} (x^2 + y^2)\right] \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U(X, Y, z) \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda d_0} (X^2 + Y^2)\right] \exp\left[-2i\pi\left(\frac{x}{\lambda d_0} X + \frac{y}{\lambda d_0} Y\right)\right] dXdY$$

intégrale de Fresnel
≡ transformée de Fresnel

Le champ diffracté à la distance d_0 est proportionnel à la **transformée de Fourier** du champ initial multiplié par un terme de **phase quadratique** et calculée en $(x/\lambda d_0, y/\lambda d_0)$

Optique de Fourier (13)

Transformée de Fresnel dans le domaine de Fourier

Rappel

$$\exp[i\pi(a^2x^2 + b^2y^2)] \xrightarrow{\text{TF}} \frac{i}{|ab|} \exp\left[-i\pi\left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}\right)\right]$$

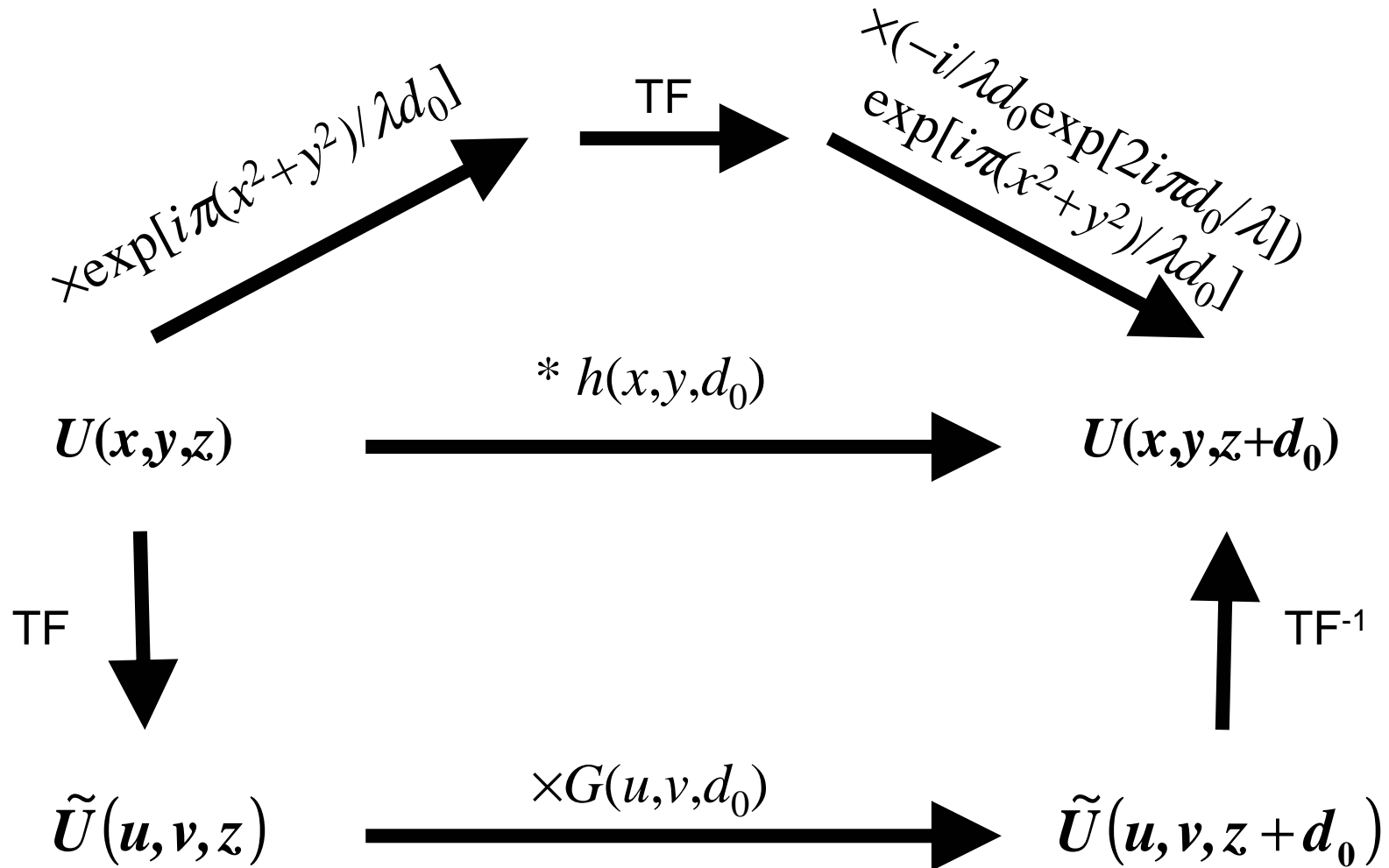
Fonction de transfert de Fresnel

$$h(x, y, d_0) = -\frac{i}{\lambda d_0} \exp\left[\frac{2i\pi d_0}{\lambda}\right] \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda d_0}(x^2 + y^2)\right]$$

$$\xrightarrow{\text{TF}} G(u, v, d_0) = \exp\left[\frac{2i\pi d_0}{\lambda}\right] \exp\left[-i\pi\lambda d_0(u^2 + v^2)\right]$$

Optique de Fourier (14)

Calcul de la Transformée de Fresnel



Relation entre T de Fourier continue et discrète (1)

Transformée de Fourier à 2 dimensions

Définition

$$\tilde{f}(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \exp[-2i\pi(ux + vy)] dx dy$$

Discrétisation de l'espace (x, y) avec $N \times M$ points et un pas $p_x \times p_y$

$$\tilde{f}(u, v) = \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{M-1} f(lp_x, kp_y) \exp[-2i\pi(ulp_x + vkp_y)]$$

\Rightarrow **Transformée de Fourier Discrète**

avec

$$f_e(x, y) = \sum_l \sum_k f(lp_x, kp_y) \delta(x - lp_x, y - kp_y) = f(x, y) \times \Pi_{p_x, p_y}(x, y)$$

et

$$\Pi_{p_x, p_y}(x, y) = \frac{1}{p_x p_y} \sum_l \sum_k \delta(x - lp_x, y - kp_y) \quad \text{Peigne de Dirac de pas } (p_x, p_y)$$

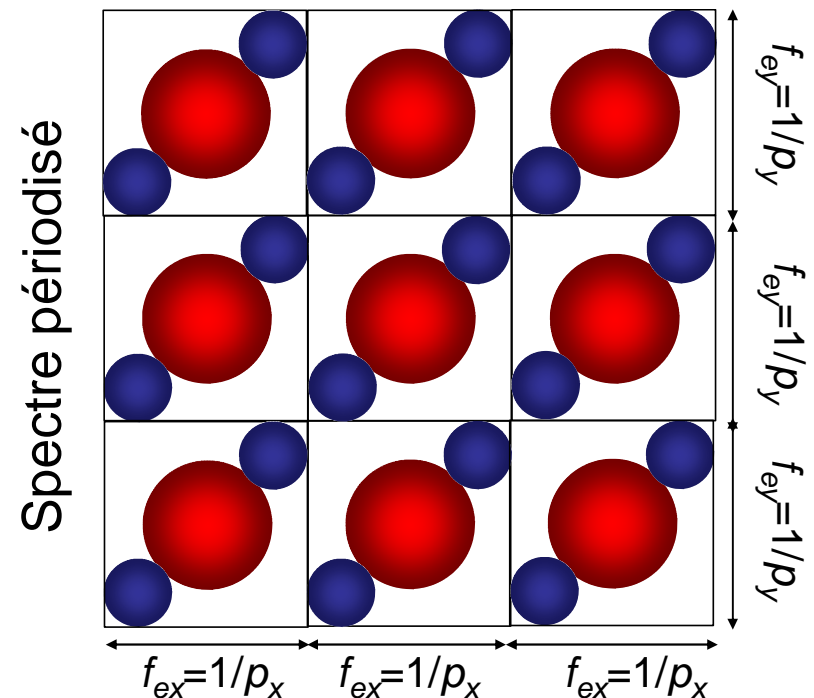
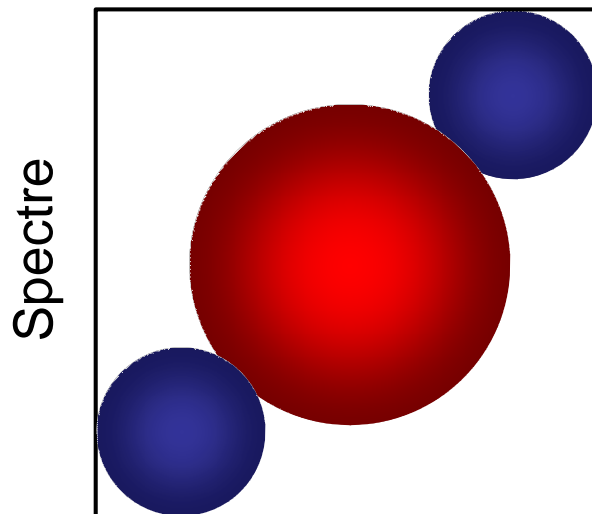
Relation entre T de Fourier continue et discrète (2)

Périodicité du spectre du champ discret

Transformée de Fourier du champ discrétisé

$$\begin{aligned} \tilde{f}_e(u, v) &= TF[f_e(x, y)] \\ &= \tilde{f}(u, v) * \sum_l \sum_k \delta\left(u - \frac{l}{p_x}, y - \frac{k}{p_y}\right) \\ &= \sum_l \sum_k \tilde{f}\left(u - \frac{l}{p_x}, y - \frac{k}{p_y}\right) \end{aligned}$$

⇒ spectre du champ discrétisé est périodique de périodes $(f_{ex}=1/p_x, f_{ey}=1/p_y)$



Relation entre T de Fourier continue et discrète (3)

Fonction de filtrage de la TFD-1

Exemple avec un champ périodique

$$f(x, y) = \cos(2\pi(u_0x + v_0y))$$

Transformée de Fourier continue

$$f(u, v) = TF[\cos(2\pi(u_0x + v_0y))](u, v) = \frac{1}{2}[\delta(u - u_0, v - v_0) + \delta(u + u_0, v + v_0)]$$

Transformée de Fourier discrète

$$DFT[\cos(2\pi(u_0x + v_0y))](u, v) = \sum_{k=0}^{k=N-1} \sum_{l=0}^{l=M-1} \cos(2\pi(ku_0p_x + lv_0p_y)) \exp[-2j\pi(ukp_x + vlp_y)]$$

soit

$$\begin{aligned} DFT[f(x, y)](u, v) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k=N-1} \exp(-2j\pi(k(u - u_0)p_x)) \sum_{l=0}^{l=M-1} \exp(-2j\pi(l(v - v_0)p_y)) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k=N-1} \exp(-2j\pi(k(u + u_0)p_x)) \sum_{l=0}^{l=M-1} \exp(-2j\pi(l(v + v_0)p_y)) \end{aligned}$$

Relation entre T de Fourier continue et discrète (4)

Fonction de filtrage de la TFD-2

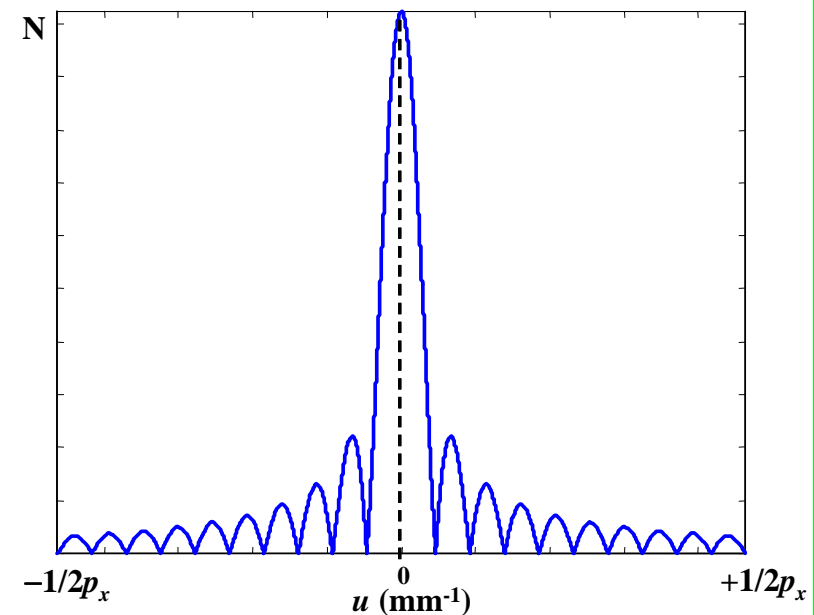
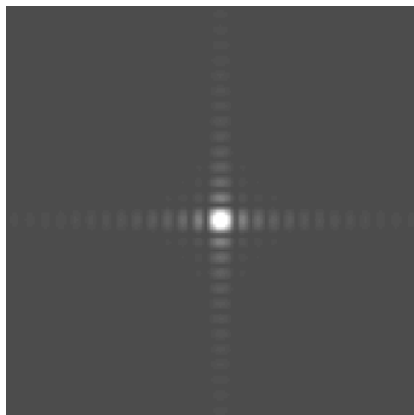
Spectre continu convolué par fonction de filtrage

$$DFT[f(x, y)](u, v) = \tilde{W}_{NM}(u, v) * \frac{1}{2} [\delta(u - u_0, v - v_0) + \delta(u + u_0, v + v_0)]$$

avec

$$\tilde{W}_{NM}(u, v) = \exp[-i\pi(N-1)up_x - i\pi(M-1)vp_y] \times \frac{\sin(\pi Nup_x)}{\sin(\pi up_x)} \frac{\sin(\pi Mvp_y)}{\sin(\pi vp_y)}$$

⇒ intrinsèque au nombre de points d'échantillonnage



Résolution fréquentielle

$$\rho_u = \frac{1}{Np_x} \quad \rho_v = \frac{1}{Mp_y}$$

Relation entre T de Fourier continue et discrète (5)

De la TFD à la FFT

FFT : Fast Fourier Transform

⇒ Algorithme de calcul rapide de la Transformée de Fourier Discrète

⇒ Nombre de points de calcul en 2^n

$L = (256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, \text{etc.})$

⇒ Pas d'échantillonnage fréquentiel imposé à $\delta u = 1/Lp_x$

⇒ Possibilité de « padding » du champ avec des 0 : augmente le nombre de points d'échantillonnage du spectre ($L \geq N$)

$$\text{pas : } \delta u = \frac{1}{Lp_x} \quad \text{résolution : } \rho_u = \frac{1}{Np_x} \quad \rightarrow \quad \delta u \leq \rho_u$$

⇒ FFT calcule le spectre sur une période

càd sur une bande passante ($1/p_x \times 1/p_y$)

Relation entre T de Fourier continue et discrète (6)

FFT et fonction de filtrage de la TFD

Exemple

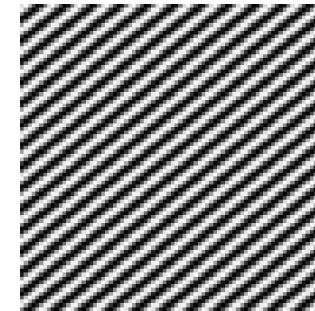
$$f(x, y) = \exp(2i\pi(u_0x + v_0y))$$

échantillonné sur $N \times M$ points

Cas 1 : échantillonnage asynchrone

Cas 2 : échantillonnage synchrone

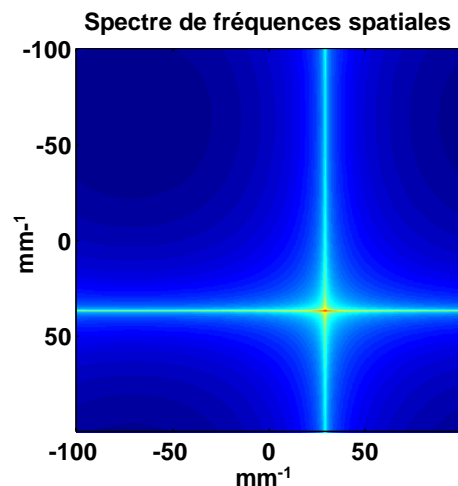
$$\Re[f(x, y)]$$



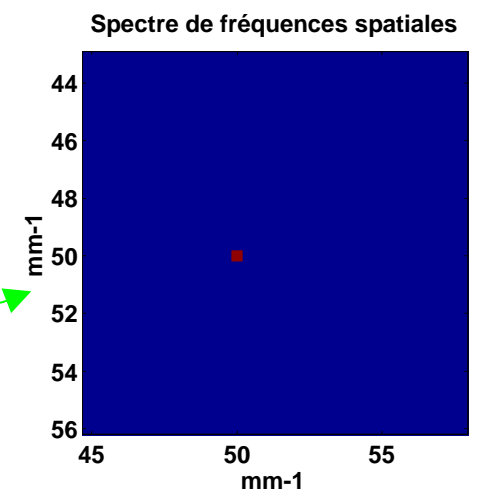
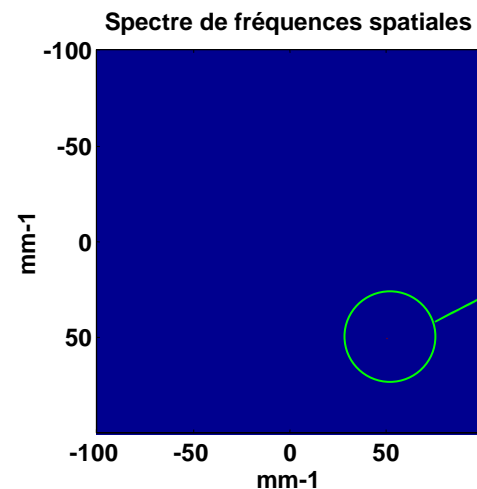
Cas 1 : $0 < u_0 < 1/2p_x$ et $0 < v_0 < 1/2p_y$

Cas 2 : $u_0 = l \times 1/2p_x$ et $v_0 = k \times 1/2p_y$

$$N \times M = L \times K$$



$$N \times M = L \times K$$



Conditions d'échantillonnage (1)

Notion de fréquence spatiale locale

Soit une fonction complexe

$$f(x, y) = A(x, y) \exp[i\Phi(x, y)]$$

Fréquences spatiales locales définies par

$$u_i = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad v_i = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

Bande passante spatiale de $f(x, y)$ donnée par

$$\Delta u = u_i^{\max} - u_i^{\min}$$

$$\Delta v = v_i^{\max} - v_i^{\min}$$

Exemple : réponse impulsionnelle de Fresnel

$$h(x, y, d_0) = -\frac{i}{\lambda d_0} \exp\left[\frac{2i\pi d_0}{\lambda}\right] \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda d_0} (x^2 + y^2)\right] \quad \rightarrow \quad u_i = \frac{x}{\lambda d_0} \quad v_i = \frac{y}{\lambda d_0}$$

Conditions d'échantillonnage (2)

Echantillonnage des réponses impulsionnelles-1

Réponse impulsionnelle échantillonnées avec $N \times M$ points et des pas $p_x \times p_y$

$$x \in [x_{\min}, x_{\max}] \quad y \in [y_{\min}, y_{\max}]$$

Réponse impulsionnelle de Fresnel

$$h(x, y, d_0) = -\frac{i}{\lambda d_0} \exp\left[\frac{2i\pi d_0}{\lambda}\right] \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda d_0} (x^2 + y^2)\right] \quad \longrightarrow \quad \Delta u = \frac{Np_x}{\lambda d_0} \quad \Delta v = \frac{Mp_y}{\lambda d_0}$$

Shannon $f_{ex} \geq 2u_i^{\max}$ \longrightarrow $d_0 \geq \max\left\{\frac{Np_x^2}{\lambda}, \frac{Mp_y^2}{\lambda}\right\}$

Réponse impulsionnelle de Rayleigh-Sommerfeld (1ère formule)

$$h(x, y, d_0) = \frac{d_0}{i\lambda} \frac{\exp\left(ik\sqrt{d_0^2 + x^2 + y^2}\right)}{d_0^2 + x^2 + y^2} \quad \longrightarrow \quad d_0 \geq \max\left\{\frac{Np_x}{2\lambda} \sqrt{4p_x^2 - \lambda^2}, \frac{Mp_y}{2\lambda} \sqrt{4p_y^2 - \lambda^2}\right\}$$

RQ : \approx identique Fresnel si $p_x \gg \lambda$

Conditions d'échantillonnage (3)

Echantillonnage des réponses impulsionnelles-2

Illustration avec $N \times M = 512 \times 512$, $p_x \times p_y = 5 \mu\text{m} \times 5 \mu\text{m}$ et $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$

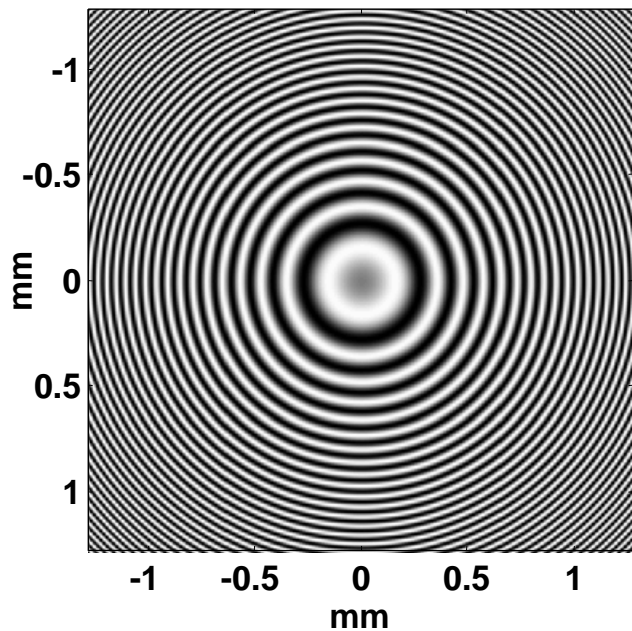
Shannon : $d_0 \geq 25,6 \text{ mm}$

$$d_0 = 100 \text{ mm}$$

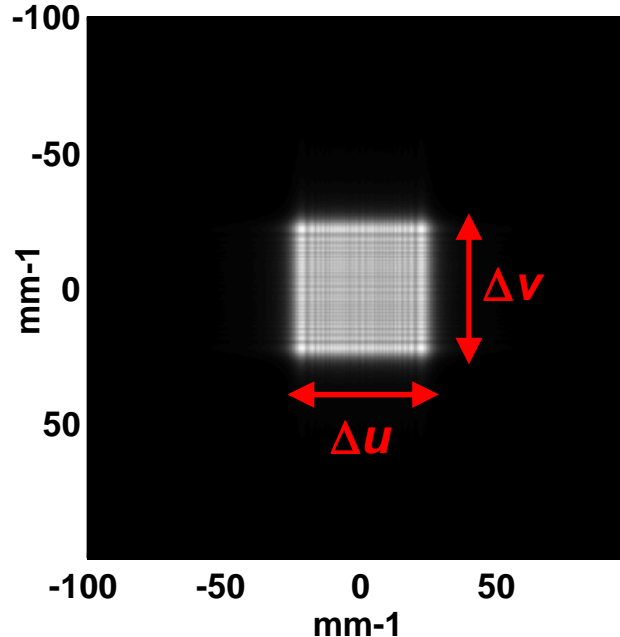
$$d_0 = 100 \text{ mm}$$

$$d_0 = 500 \text{ mm}$$

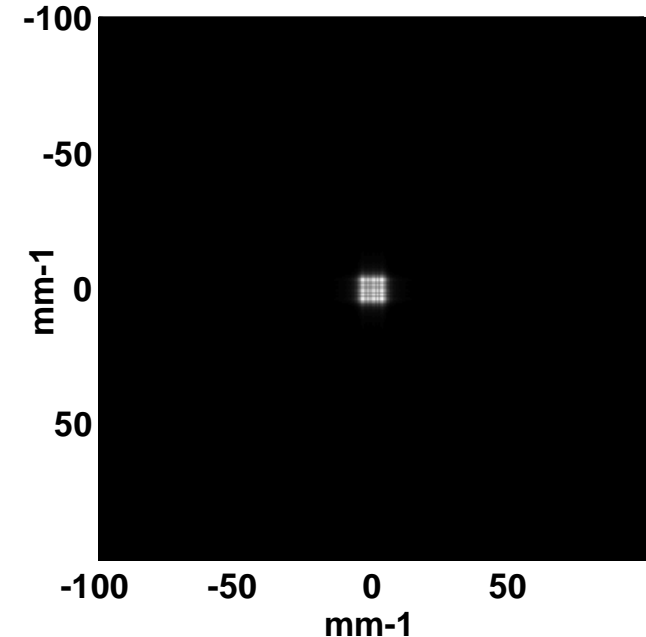
Réponse impulsionnelle de Fresnel (Re)



Spectre de fréquences spatiales



Spectre de fréquences spatiales



Conditions d'échantillonnage (4)

Echantillonnage des réponses impulsionnelles-3

Illustration avec $N \times M = 1024 \times 1024$, $p_x \times p_y = 5 \mu\text{m} \times 5 \mu\text{m}$ et $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$

⇒ extension de l'horizon d'observation

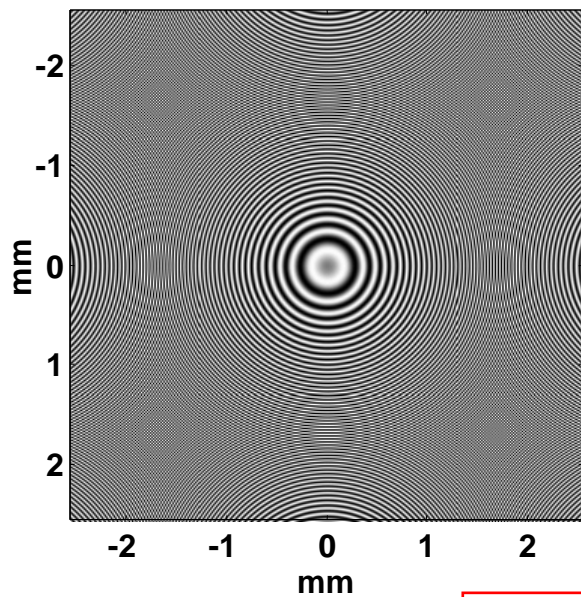
Shannon : $d_0 \geq 51,2 \text{ mm}$

$d_0 = 100 \text{ mm}$

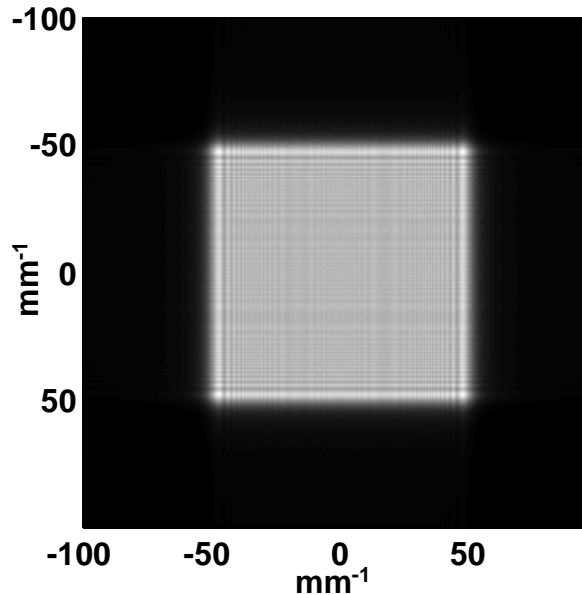
$d_0 = 100 \text{ mm}$

$d_0 = 500 \text{ mm}$

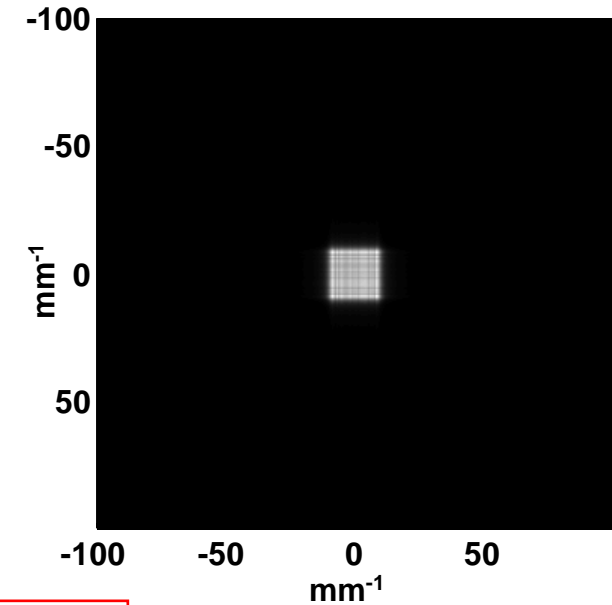
Réponse impulsionnelle de Fresnel (Re)



Spectre de fréquences spatiales



Spectre de fréquences spatiales



⇒ extension de la bande passante spatiale

Conditions d'échantillonnage (5)

Echantillonnage des réponses impulsionnelles-4

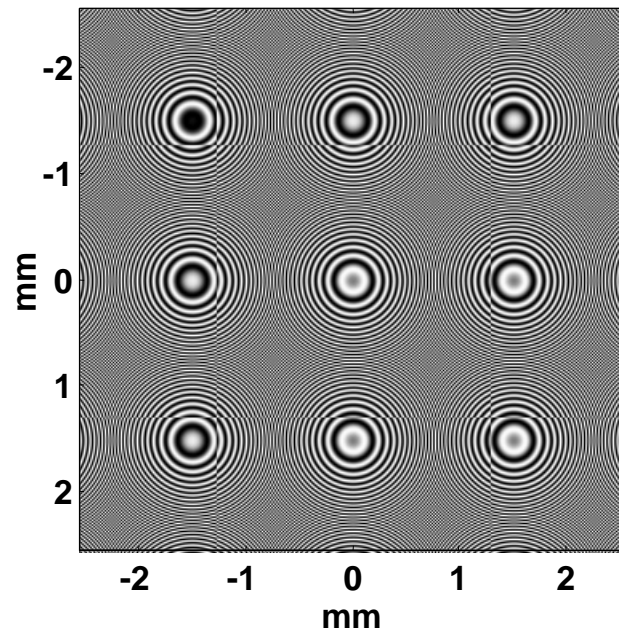
Illustration avec $N \times M = 1024 \times 1024$, $p_x \times p_y = 5 \mu\text{m} \times 5 \mu\text{m}$ et $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$

Shannon : $d_0 \geq 51,2 \text{ mm}$

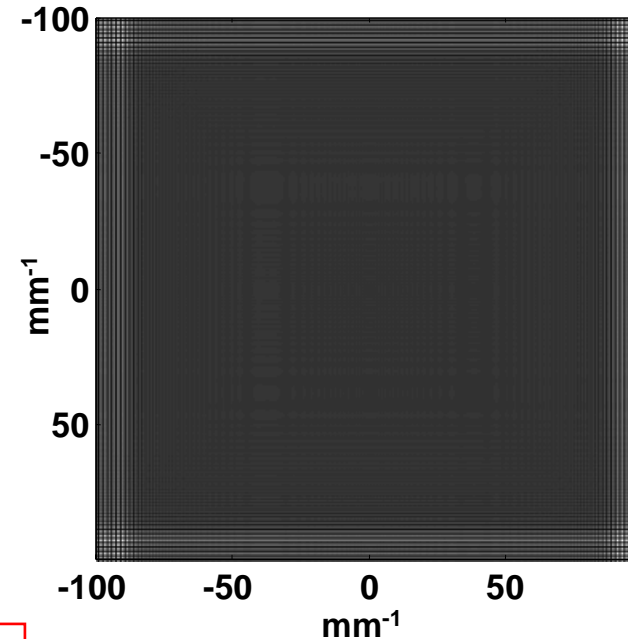
$d_0 = 45 \text{ mm}$

$d_0 = 45 \text{ mm}$

Réponse impulsionnelle de Fresnel (Re)



Spectre de fréquences spatiales



⇒ repliement

Conditions d'échantillonnage (6)

Echantillonnage des fonctions de transfert-1

Fonction de transfert de Fresnel

$$G(u, v, d_0) = \exp\left[\frac{2i\pi d_0}{\lambda}\right] \exp\left[-i\pi\lambda d_0(u^2 + v^2)\right]$$

Périodes spatiales locales définies par

$$p_{ix} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial\Phi(u)}{\partial u} = \lambda d_0 u \quad p_{iy} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial\Phi(v)}{\partial v} = \lambda d_0 v$$

Fonction de transfert calculée sur un domaine spectral $[-u_{\max}, +u_{\max}]$

« largeurs spatiales »

$$\begin{cases} \Delta p_x = 2p_{ix}^{\max} = 2\lambda d_0 u_{\max} \\ \Delta p_y = 2p_{iy}^{\max} = 2\lambda d_0 v_{\max} \end{cases}$$

Pas d'échantillonnage du spectre doivent respecter Shannon



$$\delta u \leq \frac{1}{\Delta p_x} \quad \delta v \leq \frac{1}{\Delta p_y}$$

Conditions d'échantillonnage (7)

Echantillonnage des fonctions de transfert-2

Calcul de diffraction par fonction de transfert est basé sur FFT



Algorithme FFT ($K \times L$) points impose :

- limites max du spectre

$$u_{\max} = \frac{1}{2p_x} \quad v_{\max} = \frac{1}{2p_y}$$

- pas d'échantillonnage spectral

$$\delta u = \frac{1}{Lp_x} \quad \delta v = \frac{1}{Kp_y}$$

⇒ Conditions de Shannon $d_0 \leq \min \left\{ \frac{Lp_x^2}{\lambda}, \frac{Kp_y^2}{\lambda} \right\}$

RQ : contrainte différente de rep. impulsionnelle

Fonction de transfert du spectre angulaire

$$G(u, v, d_0) = \exp \left[2i\pi d_0 / \lambda \sqrt{1 - (\lambda u)^2 - (\lambda v)^2} \right]$$

⇒ $d_0 \leq \min \left\{ \frac{Lp_x}{2\lambda} \sqrt{4p_x^2 - \lambda^2}, \frac{Kp_y}{2\lambda} \sqrt{4p_y^2 - \lambda^2} \right\}$

RQ : ≈ identique Fresnel si $p_x \gg \lambda$

Conditions d'échantillonnage (8)

Echantillonnage des fonctions de transfert-3

Illustration avec $L \times K = 512 \times 512$, $p_x \times p_y = 5 \mu\text{m} \times 5 \mu\text{m}$ et $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$

⇒ extension de l'horizon d'observation

Shannon

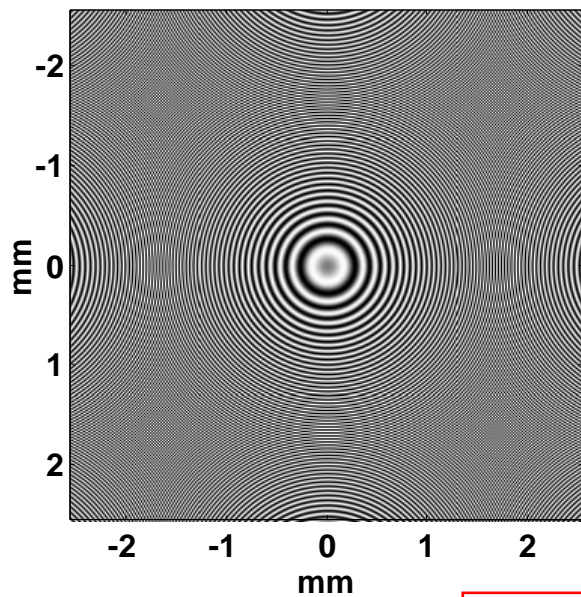
$d_0 \geq 51,2 \text{ mm}$

$d_0 = 100 \text{ mm}$

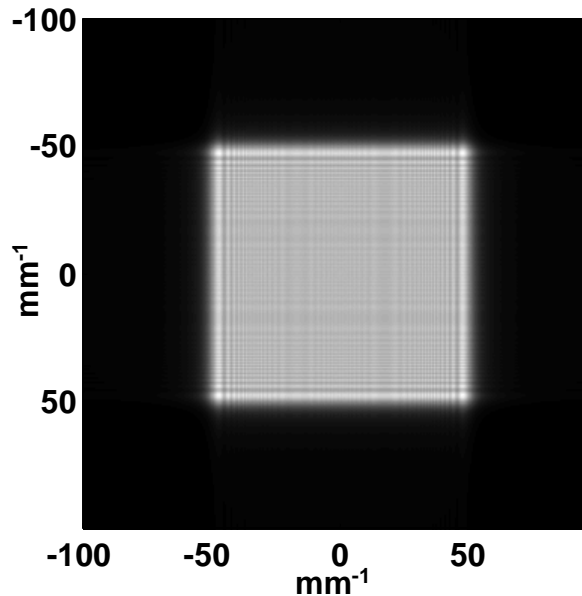
$d_0 = 100 \text{ mm}$

$d_0 = 500 \text{ mm}$

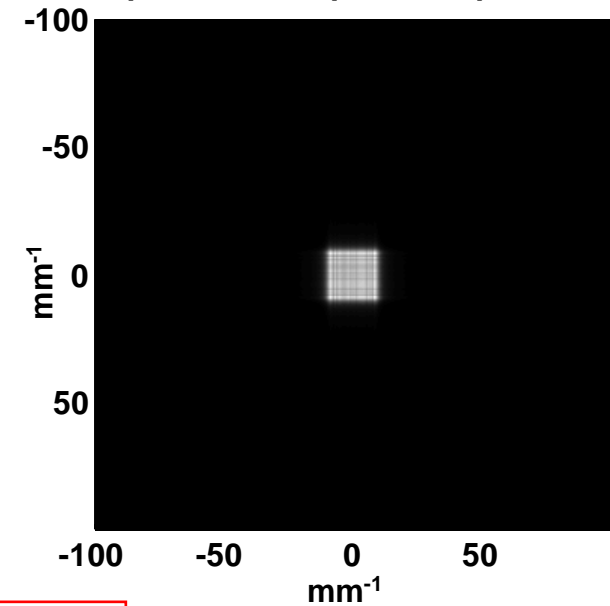
Réponse impulsionnelle de Fresnel (Re)



Spectre de fréquences spatiales



Spectre de fréquences spatiales



⇒ extension de la bande passante spatiale

Calcul de diffraction par FFT (1)

Calcul de la Transformée de Fresnel par FFT-1

Champ diffracté

$$U(x, y, d_0) = -\frac{i}{\lambda d_0} \exp\left[\frac{2i\pi d_0}{\lambda}\right] \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda d_0} (x^2 + y^2)\right]$$

Transformée de Fresnel Discrète

$$\times \sum_{l=-L/2}^{l=+L/2-1} \sum_{k=-K/2}^{k=+K/2-1} U(lp_x, kp_y, 0) \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda d_0} (l^2 p_x^2 + k^2 p_y^2)\right] \exp\left[-2i\pi \left(\frac{x}{\lambda d_0} lp_x + \frac{y}{\lambda d_0} kp_y\right)\right]$$

Périodes d'échantillonnage apparentes

$$T_x = \frac{p_x}{\lambda d_0}$$

$$T_y = \frac{p_y}{\lambda d_0}$$

T_x

T_y

Échantillonnage dans le plan image

$$\Delta\xi = \frac{1}{LT_x} = \frac{\lambda d_0}{Lp_x}$$

$$\Delta\eta = \frac{1}{KT_y} = \frac{\lambda d_0}{Kp_y}$$

Discrétisation du champ diffracté

$$U(x, y, d_0) \Rightarrow U(n, m, d_0)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = n \Delta\xi \\ y = m \Delta\eta \end{array} \right.$$

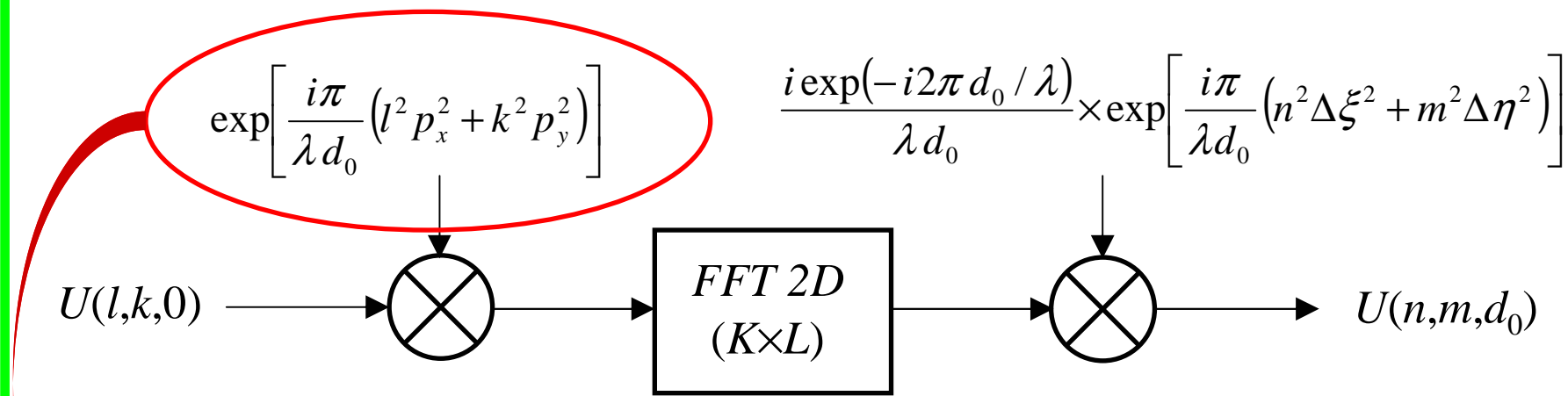
$$n \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2} - 1 \right]$$

$$m \in \left[-\frac{K}{2}, \frac{K}{2} - 1 \right]$$

Calcul de diffraction par FFT (2)

Calcul de la Transformée de Fresnel par FFT-2

Algorithme de Transformée de Fresnel Discrète – Algorithme S-FFT



Discrétisation du plan image

Condition

$$d_0 \geq \sup \left\{ \frac{Np_x^2}{\lambda}, \frac{Mp_y^2}{\lambda} \right\}$$

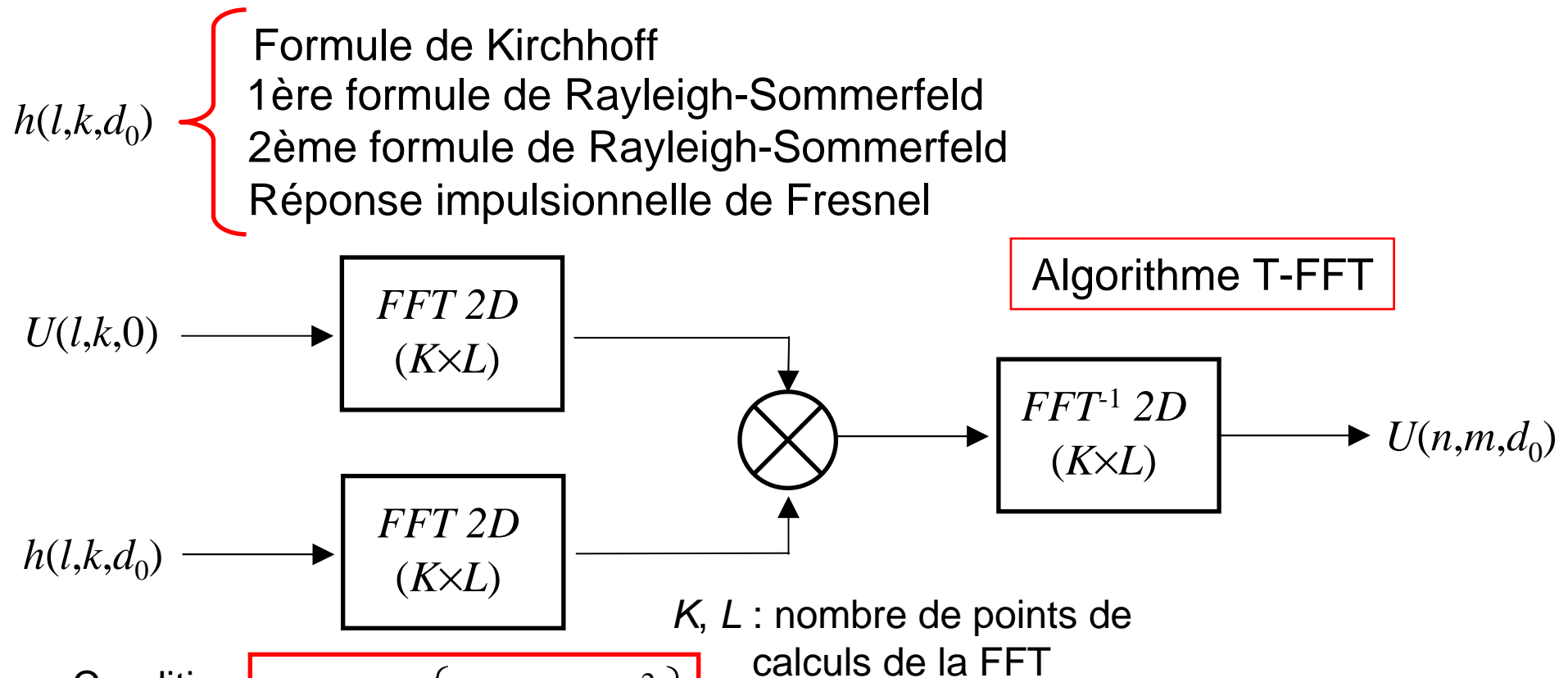
K, L : nombre de points de calculs de la FFT

$$\Delta \xi = \frac{\lambda d_0}{K p_x}$$

$$\Delta \eta = \frac{\lambda d_0}{L p_y}$$

Calcul de diffraction par FFT (3)

Implémentation de la convolution par FFT-1



Condition

$$d_0 \geq \sup \left\{ \frac{Np_x^2}{\lambda}, \frac{Mp_y^2}{\lambda} \right\}$$

Discretisation du plan image

$$\Delta\xi = p_x \quad \Delta\eta = p_y$$

Calcul de diffraction par FFT (4)

Implémentation de la convolution par FFT-2

Echantillonnage de la fonction de transfert algorithme pour FFT

- limites max du spectre

$$u_{\max} = \frac{1}{2p_x} \quad v_{\max} = \frac{1}{2p_y}$$

- pas d'échantillonnage spectral

$$\delta u = \frac{1}{Lp_x} \quad \delta v = \frac{1}{Kp_y}$$



$$G(u, v, d_0) \Rightarrow G(l, k, d_0)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = l \delta u \\ v = k \delta v \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} l = \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2} - 1 \right] \\ k = \left[-\frac{K}{2}, \frac{K}{2} - 1 \right] \end{array}$$

Fonction de transfert du spectre angulaire

$$G(l, k, d_0) = \exp \left[2i\pi d_0 / \lambda \sqrt{1 - (\lambda / Lp_x)^2 - (\lambda / Kp_y)^2} \right]$$

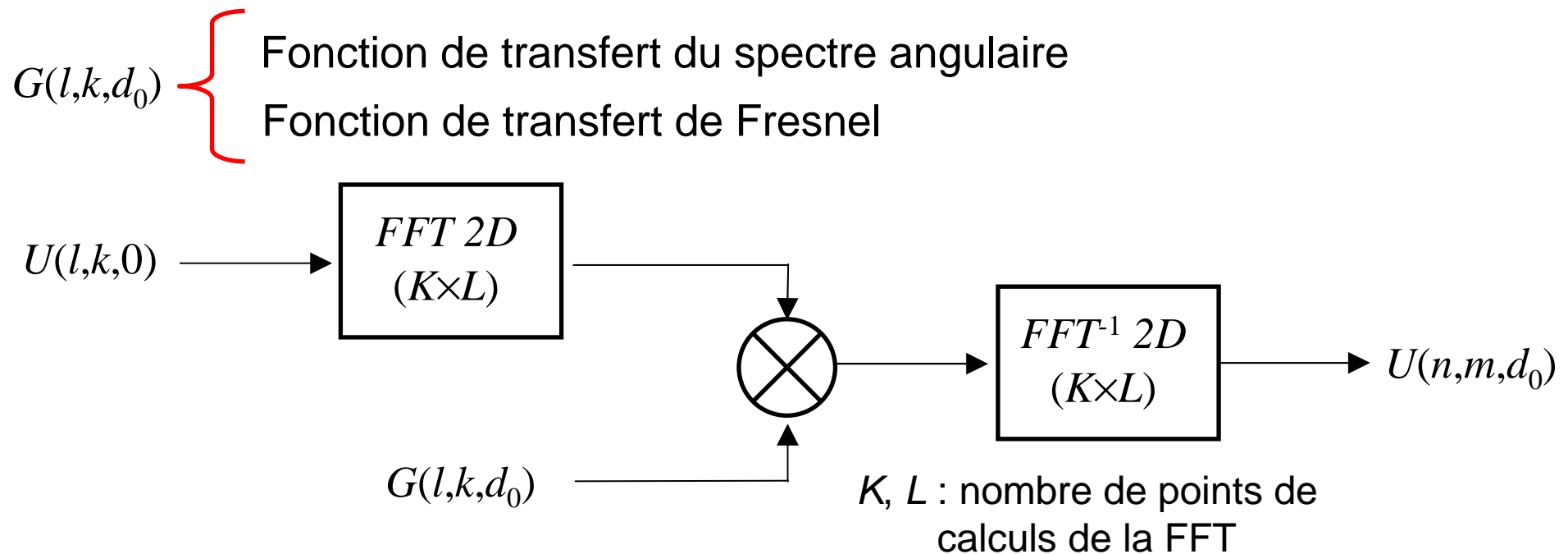
Fonction de transfert de Fresnel

$$G(u, v, d_0) = \exp[2i\pi d_0 / \lambda] \exp \left[-i\pi \lambda d_0 \left(l^2 / L^2 p_x^2 + k^2 / K^2 p_y^2 \right) \right]$$

Calcul de diffraction par FFT (5)

Implémentation de la convolution par FFT-3

Utilisation des fonctions de transfert – Algorithme D-FFT



Condition

$$d_0 \leq \min \left\{ \frac{Np_x^2}{\lambda}, \frac{Mp_y^2}{\lambda} \right\}$$

Discretisation du plan image

$$\Delta\xi = p_x \quad \Delta\eta = p_y$$

Quelques illustrations (1)

Simulation de la diffraction par Transformée de Fresnel

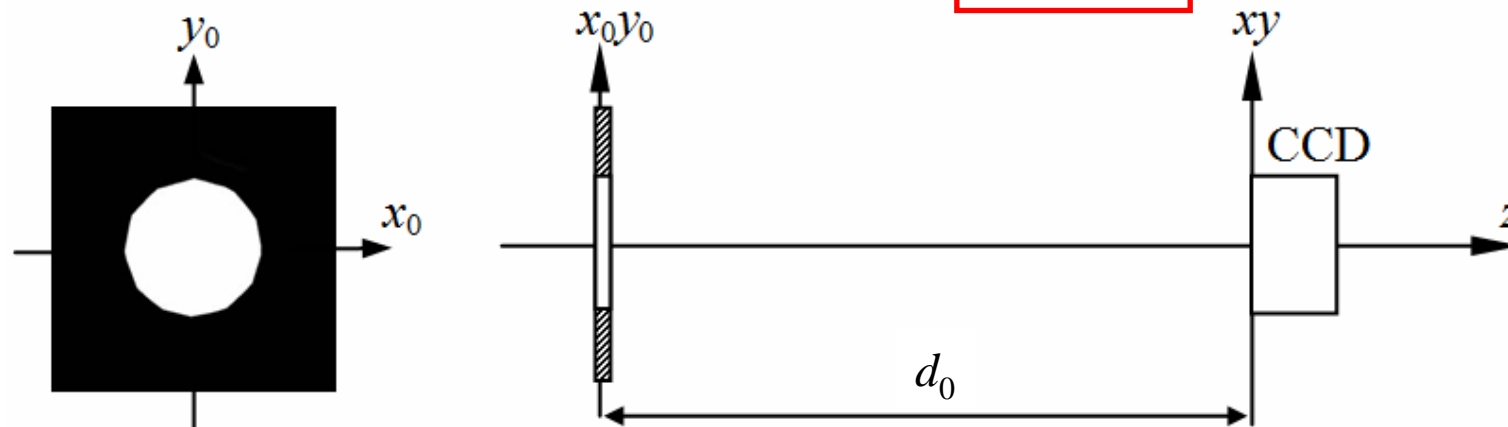
Expérience

Diaphragme de type « iris », ouverture constituée de 12 bords équilatéraux
Laser collimaté de longueur d'onde 532 nm éclaire sous incidence normale
CCD de surface $4,9 \times 6,6 \text{ mm}^2$ comprenant $N \times M = 1536 \times 2048$ pixels ($p_x = p_y = 3,2 \mu\text{m}$)
Mesure de l'éclairement à $d_0 = \{734 \text{ mm}, 367 \text{ mm}, 184 \text{ mm}\}$

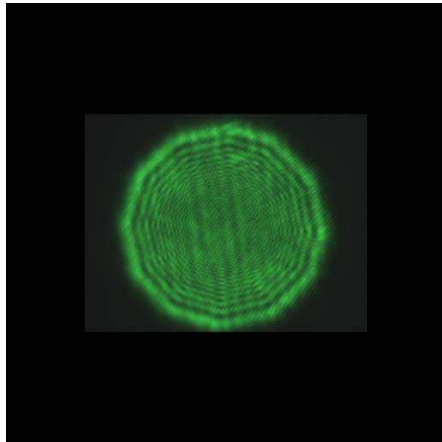
Simulation numérique

Largeur du plan objet imposée : $L_0 = 10 \text{ mm}$
 $\Rightarrow N \geq \{256, 512, 1024\}$

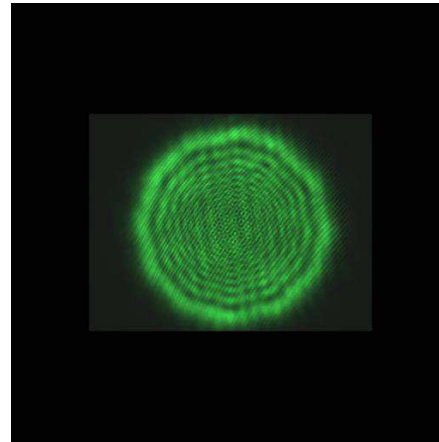
$$N \geq \frac{L_0^2}{d_0 \lambda}$$



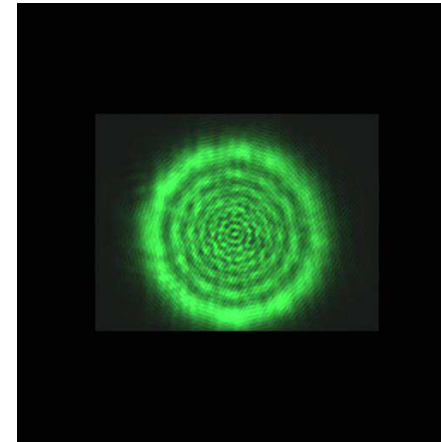
Quelques illustrations (2)



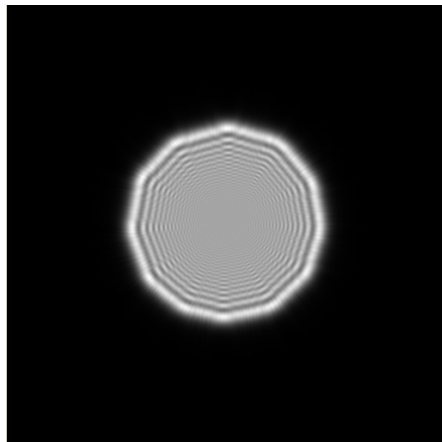
*mesure $d_0 = 184\text{mm}$
(3103×3103 pixels)*



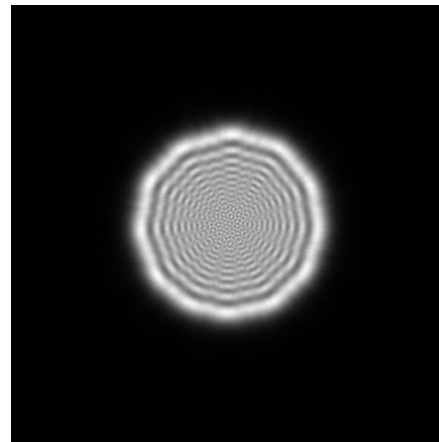
*mesure $d_0 = 367\text{mm}$
(3103×3103 pixels)*



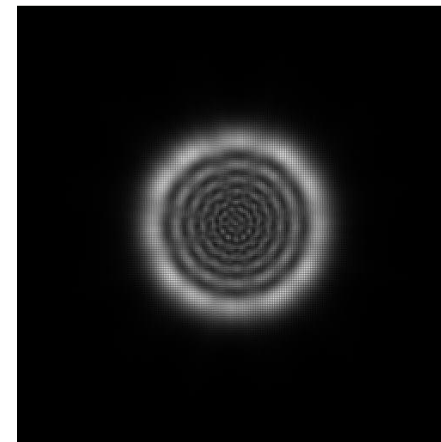
*mesure $d_0 = 734\text{mm}$
(3103×3103 pixels)*



*simulation $d_0 = 184\text{mm}$
(1024×1024 pixels)*



*simulation $d_0 = 367\text{mm}$
(512×512 pixels)*



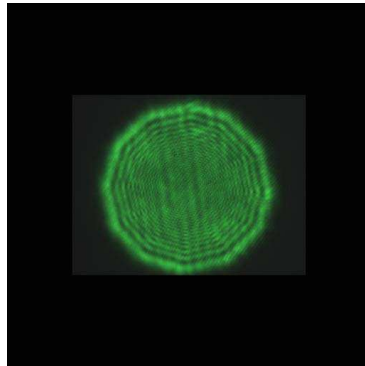
*simulation $d_0 = 734\text{mm}$
(256×256 pixels)*

Quelques illustrations (3)

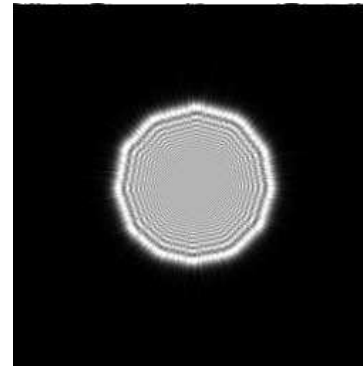
Simulation de la diffraction par Fonctions de transfert

Fonctions de transfert analytiques

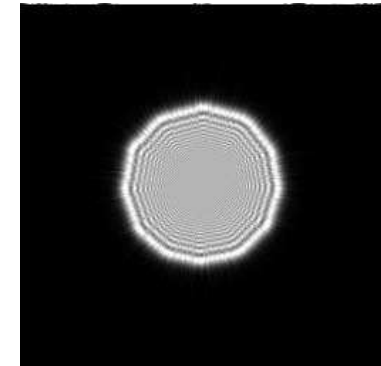
$$N \leq \frac{L_0^2}{d_0 \lambda}$$



expérience pour $d_0 = 184\text{mm}$



(a) fonction de transfert analytique de l'approximation de Fresnel

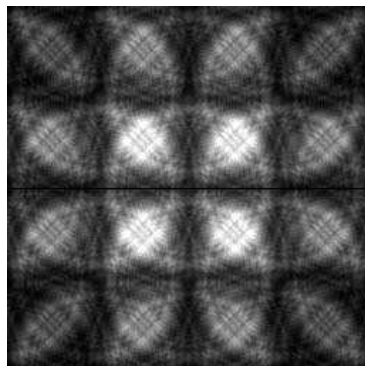


(b) fonction de transfert du spectre angulaire

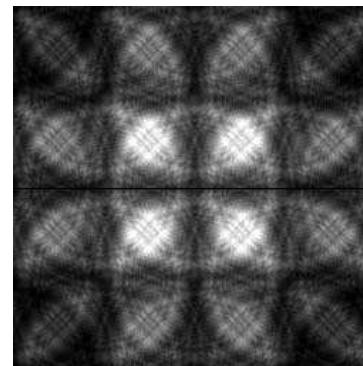
$$N = 512$$

Fonctions de transfert par FFT

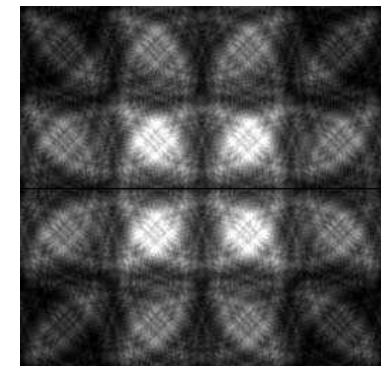
$$N \geq \frac{L_0^2}{d_0 \lambda}$$



(c) fonction de transfert de l'approximation de Fresnel calculée par FFT



(d) fonction de transfert de Kirchhoff



(e) fonction de transfert de Rayleigh-Sommerfeld

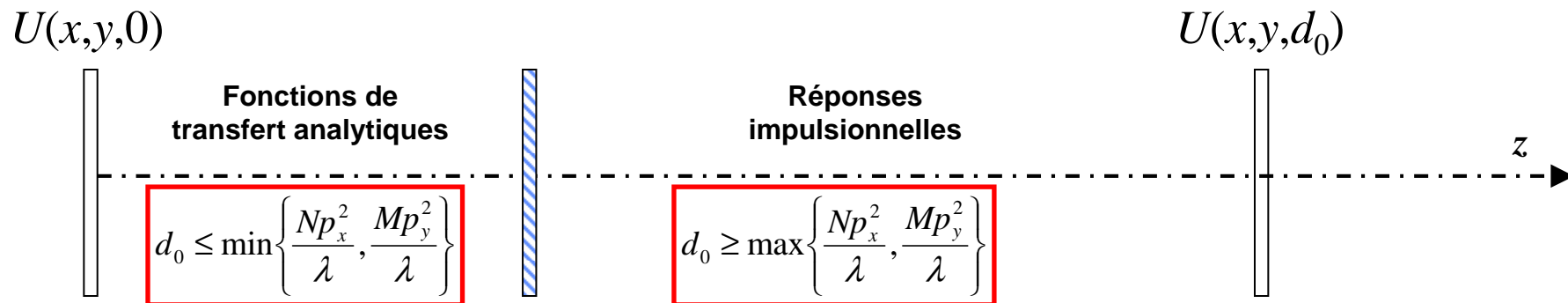
Conclusion

Calcul de diffraction à l'aide de FFT

Différentes approches

- transformée de Fresnel discrète (S-FFT)
- convolution par transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle (T-FFT)
- convolution par fonction de transfert du spectre angulaire ou de Fresnel (D-FFT)

⇒ Prise en compte des conditions d'échantillonnage



Références bibliographiques (1)

Livres

1. J.W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, Second Edition, Editions McGraw-Hill, New York (1996)
2. B.E.A. Saleh & M.C. Teich, *Fundamentals of Photonics*, Editions Wiley Series in Pure and Applied Optics, ISBN 978-0471358329 (1991)
3. M. Born & E. Wolf, *Principle of Optics*, Cambridge University Press; 7th edition, ISBN 978-052164222 (1999)
4. P. Picart, J.C. Li, *Holographie numérique : Principes, Algorithmes et Applications*, Éditions Hermès Paris, ISBN 978-2-7462-3200-6 (2011)

Références bibliographiques (2)

Publications scientifiques

1. F. Gori, Fresnel transform and sampling theorem, *Optics Communications* 39, 293-297 (1981)
2. L. Onural, Sampling of the diffraction field, *Applied Optics* 39, 5929-5935 (2000)
3. D. Mas, J. Garcia, C. Ferreira, L. M. Bernardo, and F. Marinho, Fast algorithms for free-space diffraction patterns calculation, *Optics Communications* 164, 233-245 (1999)
4. D. Mas, J. Garcia, C. Ferreira, L. M. Bernardo, and F. Marinho, Fast numerical calculation of Fresnel patterns in convergent systems, *Optics Communications* 227, 245-258 (2003)
5. L. Onural, Exact analysis of the effects of sampling of the scalar diffraction field, *Journal of the Optical Society of America A* 24, 359-367 (2007)
6. A. Stern and B. Javidi, Analysis of practical sampling and reconstruction from Fresnel fields, *Optical Engineering* 43, 239-250 (2004)